2019年江苏普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,6\}$，$B=\{x\mid x>0,x\in R\}$，则 $A\cap B=$ ＿＿＿＿＿＿．

答案：$\{1,6\}$

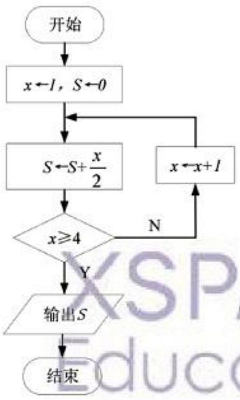
考点及思路分析：主要考查了集合运算，运用交集定义求解；

2．已知复数 $(a+2i)(1+i)$ 的实部为 0，其中 i 为虚数单位，则实数 a 的值是 ＿＿＿＿＿＿．

答案：2

考点及思路分析：主要考查了复数计算，运用复数基本计算使得实部为 0；

3．右图是一个算法流程图，则输出的 S 的值是 ＿＿＿＿＿＿．



答案：5

考点及思路分析：主要考查了逻辑框图计算，运用循环运算求解；

4．函数 $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ 的定义域是 ＿＿＿＿＿＿．

答案：$[-1,7]$

考点及思路分析：主要考查了定义域，运用根式定义域以及二次不等式求解；

5．已知一组数据 6,7,8,8,9,10，则该组数据的方差是 ＿＿＿＿＿＿．

答案：$\frac{5}{3}$

考点及思路分析：主要考查了方差，运用方差公式计算；

6．从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务，则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是＿＿＿＿＿＿．

答案：$\frac{7}{10}$

考点及思路分析：主要考查了概率，运用概率概念求解；

7．在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 经过点 $(3,4)$，则该双曲线渐近线方程

是___________.

答案：$y=\pm\sqrt{2}x$

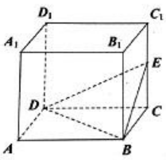
考点及思路分析：主要考查了双曲线的渐进线，运用双曲线的渐进线定义求解；

8. 已知数列$\{a_n\}(n\in N^*)$是等差数列，S_n是其前n项和，若$a_2a_5+a_8=0$，，$S_9=27$，则S_8的值是 ___________.

答案：16

考点及思路分析：主要考查了数列的基本量，运用基本量法求解即可；

9. 如图，长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的体积是120，E为CC_1的中点，则三棱锥$E\text{-}BCD$的体积是___________.



答案：10

考点及思路分析：主要考查了空间几何体的体积，可通过棱锥和棱柱的体积转化求得；

10 在平面直角坐标系xOy中，P是曲线$y=x+\dfrac{4}{x}$（$x>0$）上的一个动点，则点P到直线$x+y=0$的距离的最小值是___________.

答案：4

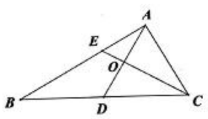
考点及思路分析：主要考查了基本不等式的运用，通过点到直线的距离公式表示出距离，然后运用基本不等式求解即可；

11. 在平面直角坐标系xOy中，点A在曲线$y=\ln x$上，且该曲线在点A处的切线经过点（$-e$，-1)(e为自然对数的底数），则点A的坐标是___________.

答案：（e，1）

考点及思路分析：主要考查了导数的几何意义，根据导数的几何意义求得斜率，表达出切线方程，然后将已知点代入可得；

12. 如图，在$\triangle ABC$中，D是BC的中点，E在边AB上，$BE=2EA$，AD与CE交于点O. 若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，则$\dfrac{AB}{AC}$的值是__________.



答案：$\sqrt{3}$

考点及思路分析：主要考查了平面向量的基本定理和数量积，选取$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$为基向量，结合极化恒等

式会更容易些；

13．已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=-\dfrac{2}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$ 的值是__________.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

考点及思路分析：主要考查了三角函数的公式的灵活运用，先求的 $\tan\alpha$ 的值，再由万能公式即可求得 $\sin 2\alpha,\cos 2\alpha$ 的值，即可求得；

14．设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 R 上的两个周期函数，$f(x)$ 的周期为 4，$g(x)$ 的周期为 2，且 $f(x)$ 是奇函数，当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$，$g(x)=\begin{cases}k(x+2),0<x\le 1\\ -\dfrac{1}{2},1<x\le 2\end{cases}$ 其中 $k>0$，若在区间（0，9]上，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 不同的实数根，则 k 得取值范围是__________.

答案：$[\dfrac{1}{3},\dfrac{\sqrt{2}}{4})$

考点及思路分析：主要考查了数形结合和直线与圆的位置关系，属综合题，对知识运用能力的考查；

15．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.

（1）若 $a=3c$，$b=\sqrt{2}$，$\cos B=\dfrac{2}{3}$，求 c 的值.

（2）若 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$，求 $\sin(B+\dfrac{\pi}{2})$ 的值.

解析：（1）$\because \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$a=3c$，$b=\sqrt{2}$，

$\therefore \cos B=\dfrac{(3c)^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot 3c\cdot c}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore c^2=\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）有正弦定理可得，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，故 $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}$.

又 $\because \dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$，所以 $\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\cos B}{2b}$，即 $\cos B=2\sin B$.

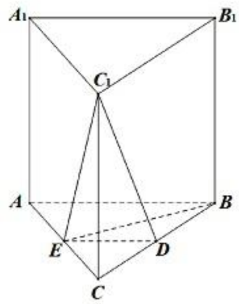
$\because \sin^2 B+\cos^2 B=1$，$\therefore$ $\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

故 $\sin(B+\dfrac{\pi}{2})=\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

考点及思路分析：主要考查了正弦定理、余弦定理等基本定理及诱导公式等基本公式，属于基础题。（1）小题根据边 a 与 c 的关系及余弦定理，代入可求得关于 c 的方程，从而求解出边长，（2）小题根据正弦定理以及已知条件转化，可求出 B 的三角函数，然后根据诱导公式即可得出答案；

16．如图，在直三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中，D、E 分别为 BC，AC 的中点，$AB=BC$

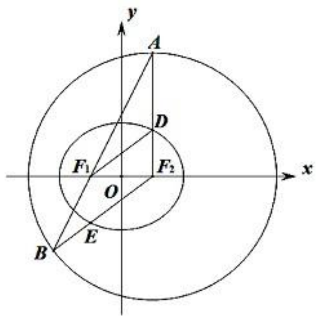
（1）A_1B_1∥平面 DEC_1；
（2）$BE\perp C_1E$.



解析：（1）∵D、E 分别为 BC，AC 的中点
∴ DE 为$\triangle ABC$ 的中位线，∴$DE\parallel AB$
∵ 三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是直三棱柱
∴ 四边形 ABB_1A_1 为矩形
∴ $A_1B_1\parallel AB$，∴$A_1B_1\parallel DE$
又∵$DE\subset$ 面 DEC_1，$A_1B_1\not\subset$ 面 DEC_1
∴$A_1B_1\parallel$平面 DEC_1
（2）∵$AB=BC$，E 为 AC 的中点
∴$BE\perp AC$
∵三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 是直三棱柱
∴$A_1A\perp$面 ABC
∵$BE\subset$ 面 ABC
∴$A_1A\perp BE$
∴$BE\perp AC$，$BE\perp A_1A$，$AC\cap A_1A=A$
∴$BE\perp$面 ACC_1A_1
∵$C_1E\subset$面 ACC_1A_1
∴$BE\perp C_1E$

考点及思路分析：立体几何的的常规考题，主要考点是线面平行的的判定以及线面垂直判定和性质的应用，属于基础题。（1）小题利用直三棱柱的性质 $A_1B_1\parallel AB$ 和中位线可得出线线平行 $DE\parallel AB$，从而推出线线平行 $A_1B_1\parallel DE$，从而线面平行 $A_1B_1\parallel$平面 DEC_1，（2）利用直三棱柱性质可知线面垂直 $A_1A\perp$面 ABC，从而得出线线垂直 $A_1A\perp BE$，再利用线面垂直的判定可证线面垂直 $BE\perp$面 ACC_1A_1，从而得以证明；

17．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点为 F_1（-1，0），F_2（1，0），过 F_2 作 x 轴的垂线 l，在 x 轴的上方，l 与圆 F_2：$(x-1)^2+y^2=4a^2$ 交于点 A，与椭圆 C 交于点 D，连接 AF_1，并延长交椭圆 C 交于点 D，连接 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B，连接 BF2 交椭圆 C 于点 E，连结 DF_1，已知 $DF_1=\dfrac{5}{2}$.
（1）求椭圆 C 的标准方程；（2）求点 E 的坐标.



解：（1）在 Rt△DF₁F₂ 中，由勾股定理，$DF_2=\sqrt{DF_1^2-F_1F_2^2}=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-2^2}=\frac{3}{2}$，

$\therefore 2a=DF_1+DF_2=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$，$a=2$，$b^2=a^2-c^2=4-1^2=3$

所以椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）由（1）可知，圆 F₂：$(x-1)^2+y^2=16$，所以点 A 为（1，4）

故 AF₁ 的直线方程为 $y=2x+2$

联立 $\begin{cases} y=2x+2 \\ (x-1)^2+y^2=16 \end{cases}$，可得 $5x^2+6x-11=0$，解得 $x_A=1$，$x_B=-\frac{11}{5}$

代入 AF₁ 的直线方程，可得 $B(-\frac{11}{5},-\frac{12}{5})$

故 BF₂ 的直线方程为 $y=\frac{3}{4}(x-1)$

联立 $\begin{cases} y=\frac{3}{4}(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，可得 $7x^2-6x-13=0$，解得 $x_1=-1$，$x_B=\frac{13}{7}$

由图可知 $x_E=-1$，代入直线 BF₂，可得点 $E(-1,-\frac{3}{2})$.

考点及思路分析：解析几何综合题，主要是椭圆方程的求解及直线与圆、椭圆的位置关系，今年圆锥曲线没有参数，难度较小。（1）小题利用勾股定理求出 DF2 的长度，然后利用椭圆性质，可求出椭圆的长半轴 a，根据勾股定理求出 b2，从而求出椭圆方程；（2）利用直线 AF1 方程与圆方程联立求出点 B 的坐标，然后求出 BF2 的方程，再与椭圆方程联立，从而求出 E 点的坐标；

18.（本题满分 16 分）

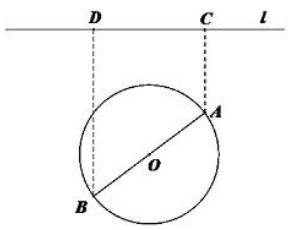
如图，一个湖的边界是圆心为 O 的圆，湖的一侧有一条直线型公路 l，湖上有桥 AB（AB 是圆 O 的直径），规划在公路 l 上选两个点 P、Q，并修建两段直线型道路 PB、QA，规划要求:线段 PB，QA

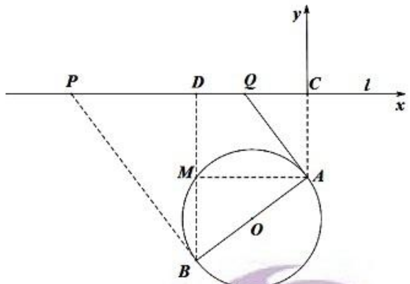
上的所有点到 O 的距离不小于圆 O 的半径，已知点 A，B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD(C、D 为垂足)，测得 AB＝10，AC＝6，BD＝12．(单位：百米)

（1）若道路 PB 与桥 AB 垂直，求道路 PB 的长；

（2）在规划要求下，P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处？并说明理由．

（3）在规划要求下，若道路 PB 和 QA 的长度均为 d(单位：百米)．求当 d 最小时，PQ 两点间的距离．





解：设 BD 与圆 O 交于点 M，连接 AM，AB 圆 O 直径，所以 AM⊥BD，易知 DM＝AC＝6，BM＝6，AM＝8，如图，以 C 为坐标原点，l 为 x 轴，建立直角坐标系，则 $A(0,-6)$，$B(-8,-12)$，$D(-8,0)$

（1）设点 $P(x_1,0)$，PB⊥AB，则 $k_{BP}\cdot k_{AB}=-1$，即 $\frac{0-(-12)}{x_1-(-8)}\cdot\frac{-6-(-12)}{0-(-8)}=-1$，解得 $x_1=-17$，所以 $P(-17,0)$，$PB=\sqrt{(-17+8)^2+(0+12)^2}=15$

（2）当 QA⊥AB 时，QA 上的所有点到 O 的距离不小于圆 O 的半径，设此时 $Q(x_2,0)$，则 $k_{AQ}\cdot k_{AB}=-1$，即 $\frac{0-(-6)}{x_2-0}\cdot\frac{-6-(-12)}{0-(-8)}=-1$，解得 $x_2=-\frac{9}{2}$，所以 $Q(-\frac{9}{2},0)$，因为 $-17<-8<-\frac{9}{2}$，在此范围内，不能满足 PB，QA 上的所有点到 O 的距离不小于圆 O 的半径，所以 P、Q 中不能有点选在点 D．

（3）设 $P(a,0)$，$Q(b,0)$，则 $a\le -17$，$b\ge -\frac{9}{2}$，$PB^2=(a+8)^2+144\ge 225$，$QA^2=b^2+36\ge 225$，则 $b\ge 3\sqrt{21}$，当 d 最小时，$PQ=17+3\sqrt{21}$．

考点及思路分析：应用题，考查直线的方程，距离公式的应用，属于中等题。（1）小题利用 PB⊥AB，斜率之积为-1，求出点 P 的坐标，然后利用距离公式求出 PB 的长度；（2）分别过 A、B 作 AB 的垂线，与 l 交点分别是 PQ，在 PQ 之间的点均不符合题意；（3）利用 PB 与 QA 距离相等，求出 Q 点坐标满足的范围，从而求出 PQ 距离的最小值。

19．(本题满分 16 分)

设函数为 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（1）若 $a=b=c$，$f(4)=8$，求 a 的值；

（2）若 $a\neq b$，$b=c$，且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，求 $f(x)$ 的极小值；

（3）若 $a=0$，$0<b\le 1$，$c=1$，且 $f(x)$ 的极大值为 M、求证: $M\le\frac{4}{27}$.

解：（1）$a=b=c$，则 $f(x)=(x-a)^3$，由 $f(4)=8$，可得 $(4-a)^3=8$，$a=2$

（2）$a\neq b$，$b=c$，则 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$，则 $f'(x)=(x-b)(3x-2a-b)$，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3,1,3\}$ 中，则 $\frac{2a+b}{3}=1$，$a=3$，$b=-3$，所以 $f(x)=(x-3)(x+3)^2$，

$f'(x)=3(x+3)(x-1)$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上单调递增，在 $(-3,-1)$ 单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，

所以 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值 $f(1)=-32$.

（3）设 $f(x)=x(x-1)(x-b)$，当 $b=1$ 时，$f(x)=x(x-1)^2$，则 $f'(x)=(x-1)(3x-1)$，易知

$M=f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$，符合题意；

当 $0<b<1$ 时，$f(x)=x^3-(1+b)x^2+bx$，$f'(x)=3x^2-2(1+b)x+b$，

由于 $f'(0)=b>0$，$f'(\frac{1}{3})=\frac{b-1}{3}<0$，$f'(1)=1-b>0$.

则存在 $0<x_1<\frac{1}{3}<x_2<1$，使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，且 $M=f(x_1)$

由 $f'(x_1)=3x_1^2-2(1+b)x_1+b=0$，可得 $b=\frac{3x_1^2-2x_1}{2x_1-1}$

则 $M=f(x_1)=x_1^3-(1+b)x_1^2+bx_1=x_1^3-(1+\frac{3x_1^2-2x_1}{2x_1-1})x_1^2+\frac{3x_1^2-2x_1}{2x_1-1}x_1=\frac{x_1^2(x_1-1)^2}{1-2x_1}$

令 $t=1-2x_1(t\in(\frac{1}{3},1))$，$\frac{x_1^2(x_1-1)^2}{1-2x_1}=\frac{1}{16}\frac{t^4-2t^2+1}{t}=\frac{1}{16}(t^3-2t+\frac{1}{t})$

令 $g(t)=\frac{1}{16}(t^3-2t+\frac{1}{t})$，$g'(t)=\frac{1}{16}\frac{(3t^2+1)(t^2-1)}{t^2}<0$，则 $g(t)<g(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$

综上，则有 $M\le\frac{4}{27}$.

考点及思路分析：导数的综合应用，考查函数的极值，不等式的证明，分类讨论、转化划归的数学思想，属于中等偏难题。（1）小题直接代入求解；（2）求导，利用函数和导函数的零点在集合 $\{-3,1,3\}$ 中。分类讨论求出 a，b 的值，再求函数的极小值；（3）和（2）的思路基本相同，求出两个极值点 x1 和 x2，然后 b 用 x1 表示，从而极大值转化为 x1 的函数，求出最大值，从而得证。

20.（本小题满分 16 分）

定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为“$M-$ 数列”.

（1）已知等比数列 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 满足：$a_2a_4=a_5$， $a_3-4a_2+4a_1=0$，求证：数列 $\{a_n\}$ 为“$M-$ 数列”.

（2）已知数列 $\{b_n\}(n\in N^*)$ 满足：$b_1=1$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

①求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

②设 m 为正整数，若存在“$M-$ 数列” $\{c_n\}(n\in N^*)$，对任意正整数 k，当 $k\le m$ 时，都有 $c_n\le b_n\le c_{n+1}$ 成立，求 m 的最大值 .

解：（1）由 $a_2a_4=a_5$， $a_3-4a_2+4a_1=0$，可得 $\begin{cases}a_1q\cdot a_1q^3=a_1q^4\\ a_1q^2-4a_1q+4a_1=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\ q=2\end{cases}$，所以数列 $\{a_n\}$ 为“$M-$ 数列”

（2）由 $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，可得 $2S_n=\dfrac{b_{n+1}b_n}{b_{n+1}-b_n}$，所以 $2S_{n+1}=\dfrac{b_{n+2}b_{n+1}}{b_{n+2}-b_{n+1}}$，两式相减可得 $2b_{n+1}=\dfrac{b_{n+2}b_{n+1}}{b_{n+2}-b_{n+1}}-\dfrac{b_{n+1}b_n}{b_{n+1}-b_n}$，显然 $b_{n+1}\ne 0$)，化简可得 $b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}$，所以 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=1$ 为首的等差数列，当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{2}{b_1}-\dfrac{2}{b_2}=\dfrac{1}{b_1}$ 解得 $b_2=2b_1=2$，所以 $d=b_2-b_1=1$，

$b_n=b_1+(n-1)d=1+n-1=n$.

（3）设 $\{c_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，则 $c_n=c_1q^{n-1}=q^{n-1}$，由 $c_n\le b_n\le c_{n+1}$ 可得 $q>1$，

且 $q^{n-1}\le n\le q^n$，求得 $n^{\frac{1}{n}}\le q\le n^{\frac{1}{n-1}}$（*），

设 $f(n)=n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln n}$，$f'(n)=\dfrac{1-\ln n}{n^2}e^{\frac{1}{n}\ln n}$，当 $1<n<e$ 时，$f'(n)>0$，当 $n>e$，$f'(n)<0$

$f(2)=\sqrt{2}$，$f(3)=\sqrt[3]{3}$，$f(2)<f(3)$，所以 $q\ge\sqrt[3]{3}$

设 $g(n)=n^{\frac{1}{n-1}}=e^{\frac{1}{n-1}\ln n}$，$g'(n)=\dfrac{n-1-n\ln n}{n(n-1)^2}e^{\frac{1}{n-1}\ln n}$，

设 $h(n)=n-1-n\ln n$，$h'(n)=-\ln n$，$n>1$ 时，$h'(n)<0$，$h(n)$ 单调递减

$h(n)<h(1)=0$，$g'(n)<0$，$g(n)$ 单调递减

若使（*）有解，则需 $n^{\frac{1}{n-1}}\ge\sqrt[3]{3}$，解得 $n\le 5$，故 m 的最大值是 5.

考点及思路分析：数列综合应用，考查数列新定义的理解，数列通项求法，数列中恒成立问题，构造法以及方程与函数思想，属于中等偏难题。（1）等比数列基本量的的计算，列方程组求解；（2）①利用 an 与 Sn 的关系，证出是等差数列，通项可求值；②恒成立问题，转化为等比数列的公比恒有解，然后利用构造函数法，放缩公比 q 的范围，但仍保证有解，从而求出 m 的范围。